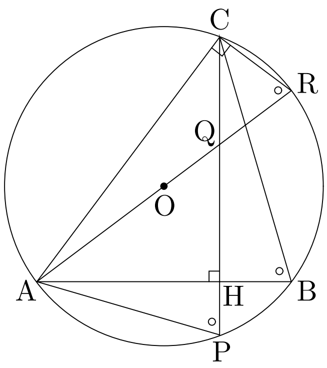
図チャレ 第81回 (2008年6月)

鋭角三角形ABCにおいて，頂点Cから辺ABにおろした垂線の足をHとし，CHの延長と外接円の交点をPとする。頂点Aから外心Oへひいた半直線と線分CPの交点をQとするとき，△ABC∽△APQであることを示せ。

解答



劣弧CAに対する円周角に注目すると

$$\angle ABC = \angle APC = \angle APQ \qquad \cdots\cdots ①$$

AQの延長と外接円の交点をRとすると，ARは直径であるから

$$\angle ACR = 90^\circ$$

劣弧CAに対する円周角に再び注目すると

$$\angle ARC = \angle APC = \angle APH$$

であるから，$\angle ACR = \angle AHP = 90^\circ$ より

$$\triangle ARC \backsim \triangle APH$$

特に，

$$\angle CAR = \angle HAP$$

であるから，

$$\angle BAC = \angle BAR + \angle CAR = \angle BAR + \angle HAP = \angle PAQ \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\triangle ABC \backsim \triangle APQ$$

(証明おわり)

(注) 鋭角三角形という仮定は，直径ARが内角BACの内側にあることを保証し，②に活かされている。また，鋭角の円周角に対する円弧は必ず劣弧となる。