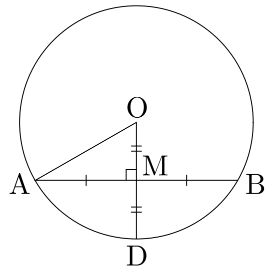
図チャレ 第82回(2008年7月)

　△ABCの外心をOとし，Oを辺AB, BC, CAに関して対称に移した点をそれぞれD, E, Fとする。△DEFの外接円が△ABCの外接円に一致するとき，△ABCはどのような三角形か。

解答



　外接円の半径をr，ABの中点をMとする。
Mは ODの中点であるから，△OAMにおいて

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OM} = 2 : 1,\quad \angle\mathrm{OMA} = 90^\circ$$

であるから，

$$\angle\mathrm{AOM} = 60^\circ$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{AOB} = 2\angle\mathrm{AOM} = 120^\circ$$

円周角の性質より

$$\angle C = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ \text{ または } 180^\circ - \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$$

同様にして，

$$\angle A = 60^\circ \text{ または } 120^\circ,\quad \angle B = 60^\circ \text{ または } 120^\circ$$

　以上の$2^3 = 8$通りの組合せのうち，

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

となるのは

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

の場合だけであるから，

△ABCは正三角形　(答)

である。