図チャレ 第83回 (2008年8月)

座標平面において，x 軸上に動点 P，y 軸上に動点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとる。線分 PQ が通過してできる領域 D を図示し，D の面積 S を求めよ。

コメント：有名問題です。

解答

対称性を考慮して，まず $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において D を求める。
$\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{1-t^2}\ )$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおく。x を $0 \leqq x \leqq 1$ で固定するとき，線分 PQ (との交点)の通過範囲は

$$x = 0 \text{ のとき } \ 0 \leqq y \leqq 1,$$

$$0 < x \leqq 1 \text{ のとき } \ 0 \leqq y \leqq -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t) \quad (t \geqq x)$$

となる。そこで，

$$f(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-t) \quad (x \leqq t \leqq 1)$$

とおくと，$x < t < 1$ において

$$f'(t) = -\frac{\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot t - \sqrt{1-t^2}}{t^2}(x-t) - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cdot (-1)$$

$$= \frac{t^2 + (1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}(x-t) + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

$$= \frac{(x-t) + t(1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}} = \frac{x-t^3}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$f'(t) > 0 \iff x > t^3 \iff t < \sqrt[3]{x}$$

であり，

t	x		$\sqrt[3]{x}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，$x \leqq t \leqq 1$ において

$$0 \leqq f(t) \leqq f(\sqrt[3]{x}\ ) = -x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right) = \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

となるから，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ における領域 D を表す不等式は

$$0 \leqq y \leqq \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

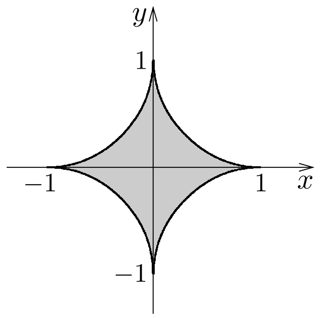
$g(x) = \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，$0 < x < 1$ において

$$g'(x) = \frac{3}{2}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} < 0$$

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} > 0
\end{aligned}
$$

であるから，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ においてつねに減少，下に凸である。

x 軸，y 軸に関する対称性を考えて，領域 D を図示すると次図の網目部分(境界を含む)となる。



(答)

$x = \sin^3\theta$ により置換積分して，領域 D の面積 S を求めると

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^1 g(x)\,dx\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}(\sin^3\theta)'\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 3\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta\\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 4\theta+\cos 2\theta-\frac{\cos 6\theta+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\
&= \frac{3}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{12}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{3}{8}\pi \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$