図チャレ 第84回(2008年9月)

xy 平面において，放物線 $y=a-x^2$ の $x \geqq 0$ の部分を C とし，C を直線 $y=x$ に関して対称移動してできる図形を C' とする。C と C' が相異なる3点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

解答

$$C : y=a-x^2 \quad (x \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

を直線 $y=x$ に関して対称に移動した曲線は

$$C' : x=a-y^2 \quad (y \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ②$$

② − ① より

$$x-y=x^2-y^2$$

$$(x-y)(x+y-1)=0$$

$$\therefore \ x=y \ \text{または} \ x+y=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ のもとで

$$①かつ② \iff ①かつ③$$

であり，C と $y=x$ は $a \geqq 0$ ならば必ず(1点で)交わるから，題意の条件は

放物線 $y=a-x^2$ が直線 $x+y=1$ と

$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ において2点で交わる

ことと同値である。

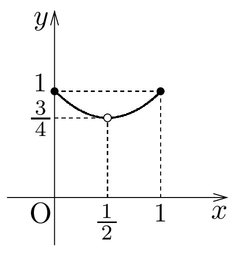
$$y=a-x^2 \ \text{かつ} \ x+y=1$$

から y を消去して，

$$a-x^2=1-x \qquad \therefore \ a=x^2-x+1$$

$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ における

$$y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$



のグラフは右図のようになるから，このグラフと直線 $y=a$ が2つの共有点をもつような a の範囲を求め，

$$\frac{3}{4} < a \leqq 1 \quad (\text{答})$$

別解

$$C : y=a-x^2 \quad (x \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C' : x=a-y^2 \quad (y \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ②$$

② − ① を変形して

$$x=y \ \text{または} \ x+y=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

を導くまでは同じ。

①＋②を変形して

$$y+x=2a-x^2-y^2$$
$$x^2+y^2+x+y=2a$$
$$\therefore\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2a+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ④$$

C と C' の共有点に関する同値関係が

①かつ② $\iff$ ③かつ④

であることを考え，2 直線③と円④の共有点がちょうど 3 個となる範囲を求めると

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2<2a+\frac{1}{2}\leqq\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(0+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$2<2a+\frac{1}{2}\leqq\frac{5}{2}$$
$$\therefore\ \frac{3}{4}<a\leqq 1 \quad (\text{答})$$