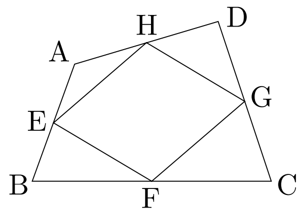
図チャレ 第86回(2008年11月)

　四角形ABCDの辺AB, BC, CD, DAの中点をそれぞれE, F, G, Hとし，△AEH, △BFE, △CGF, △DHGの重心をそれぞれP, Q, R, Sとする。四角形PQRSが平行四辺形ならば，四角形ABCDは四角形PQRSと相似な平行四辺形になることを証明せよ。

解答



　各点に対する位置ベクトルを小文字で表し，

$$\mathrm{A}(\overrightarrow{a}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b}),\ \mathrm{C}(\overrightarrow{c}),\ \mathrm{D}(\overrightarrow{d}),$$
$$\mathrm{E}(\overrightarrow{e}),\ \mathrm{F}(\overrightarrow{f}),\ \mathrm{G}(\overrightarrow{g}),\ \mathrm{H}(\overrightarrow{h}),$$
$$\mathrm{P}(\overrightarrow{p}),\ \mathrm{Q}(\overrightarrow{q}),\ \mathrm{R}(\overrightarrow{r}),\ \mathrm{S}(\overrightarrow{s})$$

とすると，E, F, G, Hはそれぞれ辺AB, BC, CD, DAの中点であるから

$$\overrightarrow{e}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2},\quad \overrightarrow{f}=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2},\quad \overrightarrow{g}=\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{2},\quad \overrightarrow{h}=\frac{\overrightarrow{d}+\overrightarrow{a}}{2}$$

重心の公式より

$$\overrightarrow{p}=\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{e}+\overrightarrow{h}}{3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{d},$$
$$\overrightarrow{q}=\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{f}+\overrightarrow{e}}{3}=\frac{1}{6}\overrightarrow{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{c},$$
$$\overrightarrow{r}=\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{g}+\overrightarrow{f}}{3}=\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{c}+\frac{1}{6}\overrightarrow{d},$$
$$\overrightarrow{s}=\frac{\overrightarrow{d}+\overrightarrow{h}+\overrightarrow{g}}{3}=\frac{1}{6}\overrightarrow{a}+\frac{1}{6}\overrightarrow{c}+\frac{2}{3}\overrightarrow{d}$$

であるから，

$$\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{c}-\frac{1}{6}\overrightarrow{d}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})$$
$$\overrightarrow{r}-\overrightarrow{s}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{a}+\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}-\frac{1}{2}\overrightarrow{d}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})$$

四角形PQRSは平行四辺形であり，$\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{s}$であるから

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})=\frac{1}{6}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d})$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

よって，四角形ABCDは平行四辺形である。

　このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{s} - \overrightarrow{p} &= \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c} + \frac{2}{3}\overrightarrow{d}\right) - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{d}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{d} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{d} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a}) \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}
\end{aligned}
$$

となるから，平行四辺形 PQRS と平行四辺形 ABCD は相似である。　　(証明おわり)