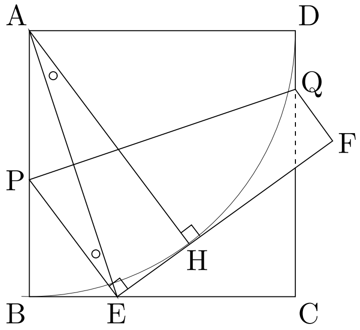
図チャレ 第87回(2008年12月)

正方形ABCDの辺AB上に点P，辺CD上に点Qをとり，線分PQを折り目として頂点Aが辺BC上の点Eに重なるように四角形APQDを折り返す。この移動で点Dは点Fに移るものとする。このとき，Aを中心としてB，Dを通る円は，線分EFに接することを証明せよ。

解答



点Aから線分EFにおろした垂線の足をHとすると，$\angle AHE = \angle PEH = 90^\circ$であるから

$$AH /\!/ PE,$$

$$\angle PEA = \angle EAH \quad (\text{錯角})$$

が成り立つ。

$AP = PE$より

$$\angle PAE = \angle PEA$$

であるから，

$$\angle PAE = \angle EAH$$

$$\therefore\ \angle EAB = \angle EAH$$

$\angle ABE = \angle AHE = 90^\circ$とあわせて，$\triangle ABE$と$\triangle AHE$は対応するすべての角の大きさが等しく，辺AEが共通であるから，

$$\triangle ABE \equiv \triangle AHE$$

特に

$$AB = AH,\quad AH \perp EF$$

であるから，点Aを中心としてB，Dを通る円は，点Hにおいて線分EFに接する。

(証明おわり)