

## 図チャレ 第 88 回 (2009 年 1 月)

平面  $\pi$  上に、一辺の長さ 1 の立方体を置き、平面  $\pi$  と  $45^\circ$  をなす平行光線をあてるとき、平面  $\pi$  上(立方体の外)にできた影の領域の面積の最大値と最小値を求めよ。ただし、平行光線が平面  $\pi$  と  $45^\circ$  をなすとは、平行光線を構成する各直線が、平面  $\pi$  へ正射影してできる直線と  $45^\circ$  をなすことを意味する。

### 解答

平面  $\pi$  上にできる影は 2 つ(または 1 つ)の側面の影であり、平面  $\pi$  に垂直で平行光線に垂直な(もしくは平行光線を含む)平面による断面を考えると、立方体の底面の正方形上の点を端点とする一方向に向いた長さ 1 の線分が掃いてできる図形となる。

平面  $\pi$  上で平行光線に垂直な方向の底面の正方形の存在範囲(長さ)を  $h$  とすると、影領域の面積  $S$  は 2 つの平行四辺形の面積和であり、

$$S = 1 \times h$$

となる。(影が 1 つの正方形となる場合も成り立つ。)

よって、

$h$  が対角線の長さに等しいとき最大、

$h$  が一辺の長さに等しいとき最小

となるから、面積  $S$  の

最大値は  $\sqrt{2}$ 、最小値は 1 (答)

