図チャレ 第89回 (2009年2月)

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ がある。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が半円 $x^2+y^2=4\ (y \geqq 0)$ の上を動くとき，$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}$ の最大値を求めよ。

出典：1999 年 宇都宮大学

解答

$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=2a$ とおくと，点 P は A, B を焦点とする長半径 a の楕円

$$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

上にある。点 P は半円

$$x^2+y^2=4 \quad (y \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ②$$

上の点でもあるから，①かつ② より y を消去して

$$\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{4-x^2}{a^2-4}=1$$

$$(a^2-4)(x+1)^2+a^2(4-x^2)=a^2(a^2-4)$$

$$\therefore\ \ 4x^2-2(a^2-4)x+a^4-9a^2+4=0$$

$2a$ のとり得る値の範囲を求めるために,

$$\begin{aligned} f(x)&=4x^2-2(a^2-4)x+a^4-9a^2+4 \\ &=4\Big(x-\frac{a^2-4}{4}\Big)^2+\frac{4(a^4-9a^2+4)-(a^2-4)^2}{4} \\ &=4\Big(x-\frac{a^2-4}{4}\Big)^2+\frac{a^2(3a^2-28)}{4} \end{aligned}$$

とおき，$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x)=0$ を満たす実数 x が存在する条件を求める。

まず，$a>2$ (楕円の性質) かつ $\dfrac{a^2(3a^2-28)}{4} \leqq 0$ が必要であり，このとき

$$0<\frac{a^2-4}{4} \leqq \frac{4}{3}\ (\leqq 2)$$

となる。この条件のもとでは

$$f(-2)=a^4-5a^2+4=(a^2-1)(a^2-4)>0$$

となるから，上の条件だけで十分であり，a のとり得る値の範囲は

$$2<a \leqq \sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

である。よって,

$$2a=\mathrm{PA}+\mathrm{PB} \text{ の最大値は } \frac{4\sqrt{21}}{3} \quad \text{(答)}$$

である。