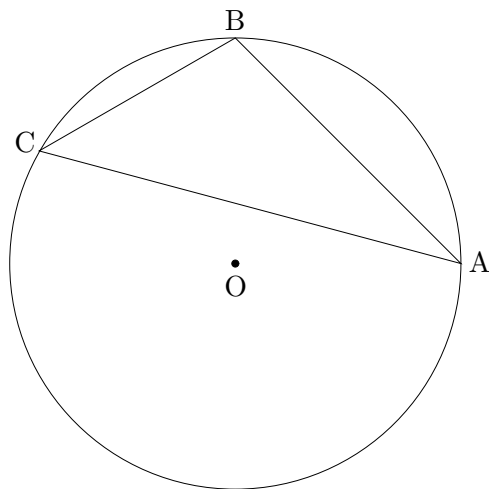


図チャレ 第90回 (2009年3月)

三角形 ABC は $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2$ を満たし, 半径 2 の円 O に内接している. ただし, $\angle ABC$ は鈍角である. 以下の問に答えなさい.

- (1) AC の長さを求めなさい.
- (2) 円 O の周上に点 D を $BA \parallel CD$ を満たすように選び, 円 O に内接する四角形 $ABCD$ を作る. 四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい.



出典：2009年 日本大学 医学部

解答

(1) $AC = x$, $\angle ABC = \theta$ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) とおくと, 正弦定理および余弦定理より

$$\sin \theta = \frac{x}{2 \times 2} = \frac{x}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 2^2 - x^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{12 - x^2}{8\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より θ を消去して

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{12 - x^2}{8\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$8x^2 + (x^2 - 12)^2 = 128$$

$$x^4 - 16x^2 + 16 = 0$$

$$\therefore (x^2 - 8)^2 = 48$$

$\theta = \angle ABC$ は鈍角であるから, $\textcircled{2}$ より

$$x^2 > 12$$

であることを考え,

$$x^2 - 8 = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} + 1)^2$$

よって, 求める AC の長さは

$$x = AC = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(2) $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より, $\theta = \angle ABC$ に対して

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{12 - (8 + 4\sqrt{3})}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

円に内接する四角形の対角は互いに補角であり, 平行線の同側内角も互いに補角であるから, 四角形 $ABCD$ は等脚台形である。頂点 C から直線 AB におろした垂線の足を H とすると,

$$BH = BC \cos(\pi - \theta) = 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$CD = AB + 2BH = 2\sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$CH = BC \sin \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

であるから, 四角形(台形) $ABCD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$