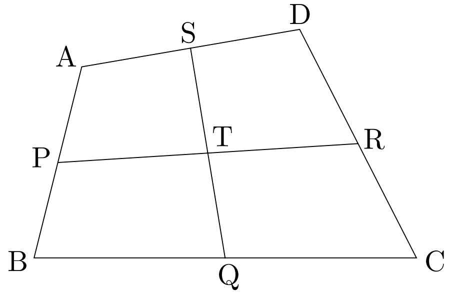
図チャレ 第91回 (2009年4月)

四角形ABCDの各辺の中点を図のようにP, Q, R, Sとする．また，
線分PRとQSの交点をTとする.



(1) Tは線分PRの中点であることを示せ.

(2) 三角形ABCの重心をD′としたとき，3点D, T, D′は一直線上にあることを示せ.

(3) 三角形ABD, ACD, BCDの重心をそれぞれC′, B′, A′とする．このとき，四角形A′B′C′D′は四角形ABCDに相似であることを示し，四角形ABCDの面積と四角形A′B′C′D′の面積の比を求めよ.

(4) 対角線ACとBDの長さが等しいとき，線分PRとQSは直交することを示せ.

出典：2009年 広島大学 総合科学部

解答

(1) 中点連結定理より

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{SR}=\frac{1}{2}\mathrm{AC},\quad \mathrm{PS}=\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\mathrm{BD} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

四角形PQRSは2組の対辺の長さが等しいから平行四辺形であり，対角線PR, QSは互いに中点で交わる。特に，TはPRの中点である。 (証明おわり)

(2) (1)の途中で示したように

TはQSの中点

でもある。直線DTと線分AQの交点をUとすると，△AQSにおいてメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{UQ}}\cdot\frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{TS}}\cdot\frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{DA}}=\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{UQ}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore\ \mathrm{AU}:\mathrm{UQ}=2:1$$

Q は BC の中点であるから U は $\triangle$ABC の重心であり，

$$\mathrm{U} = \mathrm{D}'$$

となるから，3 点 D，T，D$'$ は一直線上にある。　　(証明おわり)

(3)　(2)と同様に考えて，

C，T，C$'$ は一直線上，
B，T，B$'$ は一直線上，
A，T，A$'$ は一直線上

にあるから，四角形 ABCD と四角形 A$'$B$'$C$'$D$'$ は T を中心として相似である。
$\triangle$ADD$'$ にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TD'}}\cdot\frac{\mathrm{D'Q}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SD}} = \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{D'T}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore\ \mathrm{DT} : \mathrm{D'T} = 3 : 1$$

であるから相似比は 3 : 1 であり，

$$\begin{aligned}(\text{四角形 ABCD の面積}):(\text{四角形 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{ の面積}) &= 3^2 : 1^2\\ &= 9 : 1 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(4)　AC＝BD のとき，($*$)より

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{QR} = \mathrm{RS} = \mathrm{SP}$$

となるから，ひし形の対角線 PR，QS は直交する。　　(証明おわり)