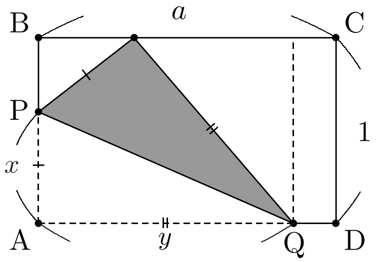
図チャレ 第92回 (2009年5月)

図のような長方形の紙ABCDがある。辺ABの長さを1，辺ADの長さをaとして，$a>1$を満たすものとする。辺AB上の点Pと辺AD上の点Qをとり線分PQで紙を折って頂点Aが辺BC上に乗るようにする。このとき$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{AQ}=y$とおき，以下の問いに答えなさい。



(1)　yと線分PQの長さを，それぞれxを用いて表しなさい。

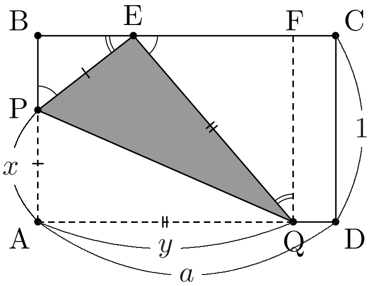
(2)　xのとり得る値の範囲は$b \leqq x \leqq 1$である。bを求めなさい。

(3)　xが**(2)**で求めた範囲を動くとき，線分PQの長さが最小となる点P, Qを考える。このときの点Qが点Dと異なるためのaの条件を求めなさい。

出典：2009年 東京理科大学 理工学部

解答

(1)　Aが重なる辺BC上の点をE，Qから辺BCにおろした垂線の足をFとする。



$\overline{\mathrm{BP}}=1-x$，$\overline{\mathrm{EP}}=x$であるから，△BPEにおいて三平方の定理より

$$\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-1} \quad \left(\frac{1}{2}<x \leqq 1\right)$$

$\angle\mathrm{PBE}=\angle\mathrm{EFQ}=\angle\mathrm{PEQ}=90^\circ$より

$$\angle\mathrm{PEB}=\angle\mathrm{EQF}$$

であるから，これをθとおくと，△EFQにおいて

$$y=\overline{\mathrm{EQ}}=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\overline{\mathrm{PE}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \quad \text{(答)}$$

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{1+\frac{1}{2x-1}}=\frac{\sqrt{2}\,x\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} \quad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$ のもとで，$1 \leqq y \leqq a$ であるから，(1)より

$$1 \leqq \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqq a$$

これを同値変形して

$$\sqrt{2x-1} \leqq x \leqq a\sqrt{2x-1}$$
$$2x-1 \leqq x^2 \leqq a^2(2x-1)$$
$$x^2 - 2a^2x + a^2 \leqq 0 \qquad (2x-1 \leqq x^2 \text{ は任意の実数 } x \text{ で成り立つ})$$
$$\therefore\ (x-a^2)^2 \leqq a^4 - a^2$$

$x \leqq 1 < a$ より

$$a^2 - x \leqq a\sqrt{a^2-1}$$
$$\therefore\ a(a-\sqrt{a^2-1}\,) \leqq x\ (\leqq 1)$$

よって，求める値 b は

$$b = a(a-\sqrt{a^2-1}\,) \quad (\text{答})$$

(3) $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，(1)より

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{PQ}}^2} = \frac{2x-1}{2x^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{2}(2t^2 - t^3) \quad (t \geqq 1)$$

この最右辺を $f(t)$ とおくと，

$$f'(t) = \frac{1}{2}(4t - 3t^2) = -\frac{3}{2}t\left(t - \frac{4}{3}\right)$$

$t > 1$ において $f'(t)$ は $-\left(t - \dfrac{4}{3}\right)$ と同符号であるから，

$t \geqq 1$ において $f(t)$ は $t = \dfrac{4}{3}$ で極大かつ最大

であり，

線分 PQ の長さは $x = \dfrac{3}{4}$ で最小

である。このとき

$$y = \frac{\dfrac{3}{4}}{\sqrt{2 \cdot \dfrac{3}{4} - 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

であるから，線分 PQ の長さが最小となる点 Q が点 D と異なるための条件は

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} < a \quad (\text{答})$$