図チャレ 第93回(2009年6月)

正方形ABCDの辺ABの中点をEとし，辺BC上に点Fを

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BF}=\mathrm{DF}$$

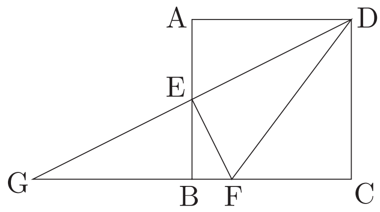
となるようにとるとき，

$$\angle\mathrm{EFD}=\angle\mathrm{EFB}$$

であることを証明せよ。

解答

〔初等幾何的証明〕



直線BCと直線DEの交点をGとすると

$$\mathrm{AE}=\mathrm{BE}$$

$$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{BEG}\quad(\text{対頂角})$$

$$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{EBG}=90^\circ$$

であるから，二角夾辺相等により

$$\triangle\mathrm{AED}\equiv\triangle\mathrm{BEG}$$

が成り立ち，特に

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BG},\ \mathrm{ED}=\mathrm{EG}$$

$\mathrm{AB}+\mathrm{BF}=\mathrm{DF}$ および $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\mathrm{BG}$ より

$$\mathrm{GF}=\mathrm{BG}+\mathrm{BF}=\mathrm{DF}$$

となるから，三辺相等により

$$\triangle\mathrm{DEF}\equiv\triangle\mathrm{GEF}$$

特に

$$\angle\mathrm{EFD}=\angle\mathrm{EFG}=\angle\mathrm{EFB}$$

(証明おわり)

〔解析的証明〕

座標平面上において A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1)，E$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，F$(x,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{AB}+\mathrm{BF}=\mathrm{DF}$ より

$$1+x=\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}$$

$$(x+1)^2=(x-1)^2+1\qquad\therefore\quad x=\frac{1}{4}$$

△DFE および △EFB の辺の長さを求めると

$$\mathrm{DE}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \mathrm{EF}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\mathrm{FD}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2}=\frac{5}{4},$$

$$\mathrm{EB} = \frac{1}{2},\quad \mathrm{BF} = \frac{1}{4},\quad \mathrm{FE} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

となって，3 辺の長さの比は等しいから

$$\triangle\mathrm{DFE} \backsim \triangle\mathrm{EFB}$$

特に

$$\angle\mathrm{DFE} = \angle\mathrm{EFB}$$

（証明おわり）