図チャレ 第94回(2009年7月)

実数 t が $0 < t \leqq 1$ の範囲で変化するとき，xy 平面上の直線

$$y = -\frac{\log t}{e^2t^2}x + \frac{2\log t + 1}{et}$$

が通過してできる領域を求め，図示せよ。ただし，e は自然対数の底とする。

解答

x を固定して，

$$f(t) = -\frac{\log t}{e^2t^2}x + \frac{2\log t + 1}{et}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{x}{e^2}\cdot\frac{\frac{1}{t}\cdot t^2 - (\log t)\cdot 2t}{t^4} + \frac{1}{e}\cdot\frac{\frac{2}{t}\cdot t - (2\log t + 1)\cdot 1}{t^2} \\ &= -\frac{x}{e^2}\cdot\frac{1 - 2\log t}{t^3} + \frac{1}{e}\cdot\frac{1 - 2\log t}{t^2} \\ &= \frac{(et - x)(1 - 2\log t)}{e^2t^3} \end{aligned}$$

$0 < t \leqq 1$ において，$f'(t)$ は $t - \dfrac{x}{e}$ と同符号であることに注意する。

(i) $\dfrac{x}{e} \leqq 0$ のとき

$0 < t \leqq 1$ でつねに $f'(t) > 0$ であるから $f(t)$ は狭義単調増加であり，

$$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{t\to+0}\frac{-x\log t + 2et\log t + et}{e^2t^2} = -\infty, \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

であるから，$0 < t \leqq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$-\infty < f(t) \leqq \frac{1}{e}$$

(ii) $0 < \dfrac{x}{e} \leqq 1$ のとき

t	(0)		$\frac{x}{e}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$(+\infty)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

$$f\left(\frac{x}{e}\right) = -\frac{\log x - 1}{x^2}x + \frac{2(\log x - 1) + 1}{x} = \frac{\log x}{x}$$

$0 < t \leqq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$\frac{\log x}{x} \leqq f(t) < +\infty$$

(iii) $\dfrac{x}{e} > 1$ のとき

$0 < t \leqq 1$ でつねに $f'(t) < 0$ であるから $f(t)$ は狭義単調減少であり，$0 < t \leqq 1$ における $f(t)$ の値域は

$$f(1) = \frac{1}{e} \leqq f(t) < +\infty$$

$f(t)$ の値域内に y が含まれると考えて，題意の直線の通過領域は

$$\begin{cases} x \leqq 0 \text{ のとき} & y \leqq \dfrac{1}{e} \\ 0 < x \leqq e \text{ のとき} & y \geqq \dfrac{\log x}{x} \\ x \geqq e \text{ のとき} & y \geqq \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

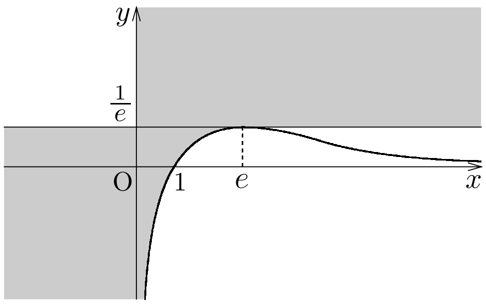
ここで，$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ とおくと，

$$g'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{\log e - \log x}{x^2}$$

(底) $= e > 1$ より，$g'(x)$ は $e - x$ と同符号であるから

x	(0)		e		$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	極大 $\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

以上により，題意の直線の通過領域を xy 平面上に図示すると，次図の網目部分となる。ただし，境界については y 軸上 $y > \dfrac{1}{e}$ の部分は含まず，$y = \dfrac{1}{e}$ 上 $x \leqq 0$ の部分と曲線 $y = \dfrac{\log x}{x}$ 上は含む。



(答)

（研究） 直線 $y=-\dfrac{\log t}{e^2t^2}x+\dfrac{2\log t+1}{et}$ が $x=g(t)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線

$$y=f'(g(t))\{x-g(t)\}+f(g(t))$$

であるとして，包絡線 $y=f(x)$ を求めてみる。 x，y を固定して

$$F(t)=f'(g(t))\{x-g(t)\}+f(g(t))-y$$

とおくと，

$$\begin{aligned}F'(t)&=f''(g(t))g'(t)\{x-g(t)\}+f'(g(t))\{-g'(t)\}+f'(g(t))g'(t)\\&=f''(g(t))g'(t)\{x-g(t)\}\end{aligned}$$

$f'(g(t))=-\dfrac{\log t}{e^2t^2}$ より $f''(g(t))g'(t)\not\equiv 0$ であるから，

$$F(t)=0 \text{ かつ } F'(t)=0$$

より

$$x=g(t),\quad y=f(g(t))$$

となる。

$$F(t)=-\frac{\log t}{e^2t^2}x+\frac{2\log t+1}{et}-y$$

を t で微分すると，解答の計算より

$$F'(t)=\frac{(et-x)(1-2\log t)}{e^2t^3}$$

$F'(t)=0$ $(0<t\leqq 1)$ より

$$x=g(t)=et$$

$F(t)=0$ より

$$F(t)=-\frac{\log t}{e^2t^2}\cdot et+\frac{2\log t+1}{et}-y=0$$

$$\therefore\ \ y=\frac{-\log t+2\log t+1}{et}=\frac{\log t+1}{et}=\frac{\log et}{et}$$

よって，直線 $y=-\dfrac{\log t}{e^2t^2}x+\dfrac{2\log t+1}{et}$ は

$$x=et \text{ における曲線 } y=\frac{\log x}{x} \text{ の接線}$$

であり，$0<t\leqq 1$ のとき接点の x 座標は

$$0<et\leqq e$$

の範囲を動くから，通過領域が解答の結果になることが直観的にわかる。