

図チャレ 第 98 回 (2009 年 11 月)

一辺の長さ 1 の正八面体 OABCDE (ABCD, OAEC, OBED が正方形) において辺 BC を $k : (1 - k)$ に内分する点を K ($0 < k < 1$) とし, 点 K を通り, 面 OAB に平行な平面を α とする。

- (1) 平面 α が辺 OC, OD と交わる点をそれぞれ F, G とする。 \vec{OF} , \vec{OG} を $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ で表せ。
- (2) 正八面体 OABCDE の平面 α による断面積 S を k で表し, $0 < k < 1$ における S の最大値を求めよ。

コメント : 昨年の東大の問題と今年のセンター試験の問題とを融合してみました。

解答

- (1) 点 L を

$$\vec{OL} = \vec{BK}$$

により定め, 平面 α と辺 AD との交点を H とすると, 四角形 OBKL と四角形 OAHL は平行四辺形となり, 三角形 OFL と三角形 OGL はともに正三角形である。よって,

$$OF = OG = OL = BK = k$$

となるから,

$$\vec{OF} = k\vec{OC} = k\vec{c}, \quad \vec{OG} = k\vec{OD}$$

ここで, \vec{OD} を求めると

$$\vec{OD} = \vec{BE} = \vec{OE} - \vec{OB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

であるから,

$$\vec{OF} = k\vec{c}, \quad \vec{OG} = k(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \quad (\text{答})$$

- (2) 平面 α と辺 AE, BE との交点をそれぞれ I, J とおくと, 正八面体 OABCDE の平面 α による断面は六角形 FGH IJK である。(1) の考察より, 四角形 KFGH は

$$KF = GH = 1 - k, \quad FG = k, \quad HK = 1$$

を満たす等脚台形であるから, その面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}(k + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - k) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - k^2)$$

断面 FGH IJK と面 OAB, 面 CDE は平行であるから, 四角形 HIJK と四角形 KFGH とは k と $1 - k$ が入れ替わった状況になっており, 四角形 HIJK の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\{1 - (1 - k)^2\} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2k - k^2)$$

両者あわせて, 断面 FGH IJK の面積 S は

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(-2k^2 + 2k + 1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ -2 \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \right\}$$

$\therefore k = \frac{1}{2}$ のとき, S の最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (答)